MAT. 307 TOPOLOJİYE GİRİŞ DERSİ BÜTÜNLEME SORULARI VE CEVAPLARI

1. Metrik uzaylarda bütün sonlu alt kümeler kapalıdır, gösteriniz.

Çözüm: (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A=\{a\}$ tek elemanlı bir kümeye uzaklıkları sıfır olan noktaların kümesi, tek elemanlı A kümesidir. Gerçekten,

$$d(x,A)=d(x,\{a\})=d(x,a)=0 \Rightarrow x=a$$

dır. O halde $\overline{A}=\{a\}=A$ olup, A kapalıdır.

Eğer $A=\{a_1,a_2,...,a_n\} \subset X$ sonlu herhangi bir altkümesi olsun. A kümesi tek elemanlı kapalı kümelerin birleşimi olarak yazılabilir, yani

$$A=\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}$$

dır. Böylece sonlu sayıdaki kapalı kümelerin birleşimi de kapalı olduğundan A kapalıdır.

2. Rasyonel ve irrasyonel sayılar kümeleri, alışılmış reel uzayda yoğun mudurlar, gösteriniz.

Çözüm :

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\overline{A}=X$ ise, A kümesine X uzayında her yerde yoğun denir.

Alışılmış reel uzayda $Q,I \subset R$ olsun. Bu durumda, Q ve I, R de her yerde yoğundurlar. Gerçekten, $Q'=R$ ve $I'=R$ dir. Diğer taraftan,

$$\overline{Q}=Q \cup Q'=R$$

$$\overline{I}=I \cup I'=R$$

olduğundan Q ve I, R de her yerde yoğundur.

3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kapalıdır $\Leftrightarrow A' \subset A$, gösteriniz.

Çözüm : A kapalı ve x, A nın bir yığılma noktası ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda, $x \in A^c$ ve $A^c \in \tau$ dur. A^c açık ve x i içerdiğinden A^c x in bir komşuluğu ve $A^c \cap A=\varnothing$ dir. O halde x, A nın bir yığılma noktası değildir. Bu bir çelişkidir. Böylece $x \in A$ dır, yani $A' \subset A$ dır.

Tersine olarak, kabul edelim ki A bütün yığılma noktalarını içersin. $y \in A^c$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda y, A nın bir yığılma noktası değildir. O halde, $\exists$ $U_y \subset X$ açık komşuluğu var $\ni$ $U_y \cap A=\varnothing$ dir. Böylece $y \in A^c$ keyfi bir nokta ve $U_y \subset A^c$ olmasından A^c açık, A kapalıdır.

4. (R,τ_d) alışılmış reel uzay ve $A=(1,2]\cup\{3,4,5\}$ alt kümesi verilsin. Bu topolojiye göre A kümesinin içini, kapanışını ve sınırını bulunuz.

Çözüm : $1\notin A$ olduğundan $1\notin A^o$ dir. $x\in A$ ve $1<x<2$ olsun. Bu durumda, $\exists\, r>0$ sayısı için $N=(x-r,x+r)\in N(x)$ var $\ni$ $x\in N\subset A$ dır. O halde $x\in A^o$ dir.

$2\in A^o$ mi? $\forall\, r>0$ sayısı için $N=(2-r,2+r)\not\subset A$ olduğundan $2\notin A^o$ dir.Benzer şekilde gösterilir ki $3,4,5\notin A^o$ dir. O halde A nın içi $A^o=(1,2)$ açık aralığıdır.

$\overline{A}$ bulmak için, A nın değme noktalarını bulmak yeterlidir. $1<x\le 2$ için $x\in A$ ve $3,4,5\in A$ olması tanıma göre A nın değme noktalarıdır. Ayrıca $\forall\, r>0$ sayısı ve $N=(1-r,1+r)\in N(1)$ için $N\cap A\neq\emptyset$ olduğundan $1, A$ nın değme noktasıdır. Böylece A nın bütün değme noktalarının kümesi $[1,2]\cup\{3,4,5\}$ dir, yani

$$\overline{A}=[1,2]\cup\{3,4,5\}$$

olur. Son olarak A nın sınırı,

$$\partial A=\overline{A}\setminus A^o=[1,2]\cup\{3,4,5\}\setminus(1,2)=\{1,2,3,4,5\}$$

olarak bulunur.

5. $\beta=\{[a,b):a<b,a,b\in R\}$ ailesinin R üzerinde bir topoloji için taban olduğunu gösteriniz, ürettiği topolojiyi bulunuz.

Çözüm : β ailesinin X üzerindeki bir topolojiye taban olması için taban olma şartları olarak bilinen $(b1)$ ve $(b2)$ yi sağlaması gerekir. Gerçekten, R bu şartları sağlar. R nin her bir elemanı kapalı-açık bir aralığa ait olduğundan R , β nın elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir. Böylece $(b1)$ özelliği sağlanmış olur.

Herhangi $[a,b),[c,d)\in\beta$ için $[a,b)\cap[c,d)$ arakesiti boş ise, $(b1)$ sağlandığından $[a,b)\cap[c,d)\in\beta$ dır. Bu durumda $(b2)$ sağlanmış olur. Eğer

$$a<c<b<d\Rightarrow[a,b)\cap[c,d)=[c,b)$$

dir. $[c,b)$ kapalı-açık olduğundan $[a,b)\cap[c,d)\in\beta$ ir. Bu durumda $(b2)$ sağlanır. O halde β ailesi R üzerinde

$$\tau=\left\{\bigcap_{[a,b)\in\theta}[a,b):\theta\subset\beta\right\}$$

topolojisini üretir. Bu topolojiye R nin alt limit topolojisi denir.

6. $X\neq\emptyset$ kümesinin her x noktası için komşuluk aksiyomları diye adlandırılan $(N1),(N2),(N3),(N4)$ özelliklerini sağlayan $\beta(x)$ ailesi verilsin. Bu durumda X kümesi üzerinde bir tek τ topolojisi var öyle ki bu topolojiye göre x noktasının komşuluklar ailesi $N(x),\beta(x)$ ailesine eşittir, gösteriniz.

Çözüm : $\beta(x)$ ten faydalanarak bir τ ailesi tanımlayalım:

$$\tau = \left\{ A \in P\left(X\right) : x \in A ve A \in \beta\left(x\right) \right\}$$

olsun. Önce τ ailesinin sonlu kesişim ve keyfi birleşime göre kapalı olduğunu gösterelim:

t2) Herhangi $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$?

$(N1)$ aksiyomundan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$ dır. $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ olsun. $i = 1, 2, ..., n$ için $x \in A_i \in \beta(x)$ tir. $(N3)$ aksiyomundan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \beta(x)$ olup τ nun tanımından $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ bulunur.

t3) $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$?

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olsun. Birleşim işleminden $\exists\, i_0 \in I$ için $x \in A_{i_0}$ dır. $A_{i_0} \in \beta(x)$ ve $A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olması ve $(N2)$ aksiyomundan $\bigcup_{i \in I} A_i \in \beta(x)$ tir. τ nun tanımından $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ bulunur.

t1) Kesişim ve birleşim işlemi tanımlı olduğundan $\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing, \bigcap_{i \in \varnothing} A_i = X$ dir. τ nun tanımından $\varnothing, X \in \tau$ bulunur. Böylece τ , X üzerinde bir topolojidir.

τ topolojisine göre $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $N(x)$ olsun. $N(x) = \beta(x)$ mi?

$\forall N \in N(x)$ için $\exists U \in \tau$ var öyle ki $x \in U \subset N$ dir. $U \in \tau$ ve $x \in U$ olduğundan $U \in \beta(x)$ tir. $(N2)$ aksiyomundan $N \in \beta(x)$ tir. O halde

$$N(x) \subset \beta(x) \qquad [1]$$

dir. $\forall A \in \beta(x)$ için $W = \{ y \in X : A \in \beta(y) \}$ olsun. $A \in \beta(x)$ olduğundan W nın tanımından $x \in W$ ve $W \neq \varnothing$ dir. $\forall\, y \in W$ için $A \in \beta(y)$ ve $N(1)$ aksiyomundan $y \in A$ dır. O halde $W \subset A$ dır.

$W \in \tau$ mu? W nın açık olduğunu göstermek için W , her elemanının komşuluğu olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall\, y \in W$ ve $A \in \beta(y)$ vardır öyle ki her $z \in W$ dır. Böylece $V \subset W$ dır. $V \in \beta(y)$ ve $(N2)$ aksiyomundan $W \in \beta(y)$ dir. Böylece W , içindeki her noktanın komşuluğudur. O halde $W \in \tau$ dır. Sonuç olarak A, x noktasının komşuluğudur, yani $A \in N(x)$ dir. Böylece

$$\beta(x) \subset N(x) \qquad [2]$$

bulunur. [1] ve [2] den $\beta(x) = N(x)$ dir.

Son olarak τ nun tekliğini gösterelim: Hipotezde verilen şartları sağlayan başka bir τ' topolojisi olsun. τ ve τ' nün açıkları aynı olduğundan $\tau = \tau'$ dür.